МАТЕМАТИКАЛЫҚ ОЛИМПИАДА

Қазіргі заман - математика ғылымының өте кең, жан-жақты тараған кезеңі. Оқушылардың математикалық сауаттылығын арттыру, олардың алған білімінің тиянақты болуын қамтамасыз ету, алған білімін қолданбалы мақсатқа бағыттау - заман талабы болып отыр. Оқушылардың математикалық сауаттылығын жан-жақты жетілдіру – қазіргі аса маңызды міндеттердің бірі. Дарынды балалардың қабілетін дамытудың жолдары жеткілікті. Соның ішінде олимпиадалардың рөлі ерекше. Оқушылардың пәнге қызығушылығын оятатын, олардың математикалық ой-өрісінің, шығармашылық қабілетінің дамуына дәнекер болатын қосымша тақырыптар мен сұрақтар көп әсерін тигізеді. Мұндай сұрақтар олимпиада тапсырмаларында жиі кездеседі. Дарынды оқушылардың құзыреттілігін дамытуда мектеп пәндері олимпиадасы маңызды рөл атқарады. Жыл сайын мектепішілік, аудандық, облыстық және республикалық, халықаралық математикалық олимпиада өткізіледі. Математикалық олимпиадаларда және конкурстарда ұсынылған есептер оқушылардың шығармашылық ой-өрістерін, құзыреттілігін талап ететін бірегей идеяларға негізделген.

***Міндеті*:**

- **дарынды балаларды шығармашыққа ынталандыру;**
- **дарынды балардың ғылыми – зерттеу және шығармашылық іздену қабілетінің қалыптасуына жағдай жасау.**
- **оқушылардың математикалық әдебиетпен жұмыс жасау дағдылараарын қалыптастыру.**

Математикалық олимпиада тапсырмаларын орындау барысында төмендегідей құзіреттілікке ие болу қажет:

***Білу қажет*:**

- **Олимпиада есептерін шешудің алгебралық әдістерін;**
- **Олимпиада есептерін шешудің геометриялық әдістерін.**

***Істей білу қажет*:**

- **Олимпиада есептерін шешу кезінде неғұрлым ұтымды әдістерді таңдай білу және қолдана білу;**
- **Олимпиада есептерін талдау және шешім табу жолын негіздеу.**

ТЕҢСІЗДІКТЕРДІ ДӘЛЕЛДЕУ ӘДІС-ТӘСІЛДЕРІ

- **Видео-сабақтың мақсаты:** **Математикалық олимпиада тапсырмаларында жиі кездесетін теңсіздіктерге қатысты есептерді шығару әдіс-тәсілдерін іздестіріп, таңдай білуге және қолдана білуге үйрету. Алгебралық теңсіздіктерді шешудің әдістері мен тәсілдерін жүйелеу және оларды есептерді шығаруда қолдану.**
- **Сабақтың міндеттері:**
- **- Математикалық олимпиада тапсырмаларында кездесетін теңсіздікдерге қатысты есептерді саралау;**
- **- Теңсіздіктерді дәлелдеу әдіс-тәсілдерін зерделеу;**
- **- Берілген теңсіздіктерді дәлелдеуге қатысты әдіс-тәсілді іздестіріп, қолдану;**
- **- Математикалық олимпиада тапсырмаларында кездесетін классикалық теңсіздіктерді қолдану.**
- **- Математикалық талдау элементтерін қолдану.**
- **- Геометриялық түсініктерді қолдану.**
- **Сабақтың әдістемелік деңгейі:** **Тақырыпқа сәйкес негігі ойлар мен теңсіздіктерді дәлелдеудің әдіс-тәсілдерін іріктеу, ғылыми және ақпараттық тұрғыда баяндау.**
- **Сабақтың көрнекілігі:** **Аудиовизуалды дидактикалық материалдарды қолдану.**

-
- Теңсіздіктерді зерттеуге математика саласында ерекше көңіл бөлінеді, өйткені бұл көптеген физикалық немесе басқа білім беру мәселелерінің математикалық модельдері болып табылатын алгебралық теңсіздіктер, сондықтан оларды шешу әдістері көп жағдайда қиындық тудырады.
- Ұзақ уақыт аралығында теңсіздіктер математиканың әртүрлі мәселелерінде маңызды рөл атқарды, өйткені олар ең үлкен және ең кіші мәндерді табу мәселелерін шешуге мүмкіндік береді.

Теңсіздіктерді дәлелдеудің жиі кездесетің әдістері:

- біртіндеп бағалау әдісі;
- өрнектерді түрлендірулер арқылы дәлелдеу әдісі;
- математикалық индукция әдісі;
- классикалық теңсіздіктерді (арифметикалық. Геометриялық, гармоникалық, квадраттық орталар арасындағы қатыс, Коши-Буняковский, Бернули, Гельдер, Юнг теңсіздіктері және т.б.) қолдану әдісі;
- математикалық талдау элементтерін қолдану әдісі;
- геометриялық түсініктерді қолдану әдісі;
- графикалық әдіс;
- «кері жору» әдісі;
- тепе-теңдікті қолдану әдісі;
- жаңа айнымалы енгізу әдісі.

а) Теңсіздікті дәлелдеу үшін функция туындысын қолдану әдісі

Функция туындысының көмегімен берілген теңсіздік құрамындағы функцияны зерттеу арқылы сол функцияның монотондылық және шектелгендік қасиеттері қолданылады. Сол сияқты теңсіздікті дәлелдеуде Лагранж теоремасы жиі қолданылады.

Есеп 1. $\sqrt{1+x} \le 1 + \frac{x}{2}$, **x >1, теңсіздігін дәлелдеңдер.**

Дәлелдеу. f(x) = $\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}$ **функциясын қарастыралық және оның туындысы:**

- $f'(x) = (\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2})' = \frac{1}{2}\sqrt{1+x} - \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{1+x}}{2}$ ≤ 0 **барлық** $x > 0$ **үшін**
- **f(0)=1−0−1=0 ескеріп, барлық** $x > 0$ **үшін** $f(x) \le 0$ **болатынын аламыз, демек**

$$\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} \le, \sqrt{1+x} \le 1 + \frac{x}{2}.$$

…………………………………………………………………………………………………

- **Есеп 2.** 100^{101} **және** 101^{100} **салыстырыңдар.**
- **Шешуі.** f(x)= $\frac{lnx}{x}$ **функциясын қарастыралық. Оның туындысын есептелік:** f′(x)=$(\frac{lnx}{x})' = \frac{1-lnx}{x^2}$.
- **x > e болғанда функция туындысы теріс мәндер қабылдайды, демек, x > e болғанда функция**
- **кемімелі, яғни** $\frac{ln100}{100} > \frac{ln101}{101}$ **қатысы орынды болады. Бұдан аламыз: 101·ln100 > 100·ln101,** $100^{101} > 101^{100}$.
- **Есеп 3. Теңсіздікті дәлелдеңдер: (b –*a*)/b ≤ lnb/*a* ≤ (b−*a*)/*a*, мұнда 0 < *a* ≤ b.**
- **Дәлелдеу.** **f(x)=lnx функциясын қарастырып, оған [*a*;b] кесіндісінде Лагранж формуласын**
- **қолданалық: (f(b)−f(*a*))/(b−*a*) = f′(ξ), ξ∈(*a*,b).**
- **Демек, (lnb−ln*a*)/(b−*a*) = 1/ξ, lnb/*a* = (b−*a*)/ξ. Бұл теңсіздіктің оң бөлігі ξ=b болғанда минимум мәнге, ξ=*a* болғанда максимум мәнге ие болады. Сондықтан аламыз: (b−*a*)/b ≤ lnb/*a* ≤ (b−*a*)/*a*.**
-

Өрнектерді түрлендіру әдісі

- **Есеп 4.** Теңсіздіктерді дәлелдеңдер:
  - а) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2 \cdot (a + b + c)$;
  - б) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$;
  - в) $x^5 + y^5 - x^4y - x^4y \geq 0$ при $x > 0, y > 0$.

Дәлелдеу. а) $a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 1 + 1 - 2a - 2b - 2c = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0$,

б) Теңсіздіктің екі бөлігін 2-ге көбейтсек, аламыз: $2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2a + 2b$, немесе

$(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) \geq 0$, $(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0$, теңдік $a = b = 1$ болғанда орындалады.

в) Теңсіздіктің сол бөлігін мына түрде түрлендірелік:

$$x^5 + y^5 - x^4y - x^4y = x^5 - x^4y - (x^4y - y^5) = x^4(x - y) - y^4(x - y) = (x - y)(x^4 - y^4) = (x - y)(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) =$$

$$= (x - y)^2 (x + y)(x^2 + y^2) \geq 0.$$

Есеп 4. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – теріс емес сандар: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \frac{1}{2}$. Дәлелдеңдер: $(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) < 2$.

Дәлелдеу. Теңсіздіктің сол бөлігіндегі жақшаларды ашып, аламыз:

$$1 + (a_1 + \ldots + a_n) + (a_1a_2 + \ldots + a_{n-1}a_n) + (a_1a_2a_3 + \ldots + a_{n-2}a_{n-1}a_n) + \ldots + a_1a_2\ldots a_n.$$

екінші жақшадағы сандар қосындысы $(a_1 + \ldots + a_n)^2$ өрнектен артық емес, үшінші жақшадағы сандар қосындысы $(a_1 + \ldots + a_n)^3$ өрнектен артық емес, және сол сияқты. Демек, барлық көбейтінді артық емес:

$$1 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 + \ldots + {}^1/_{2^n} = 2 - {}^1/_{2^n} < 2.$$

Классикалық теңсіздіктерді қолдану әдісі

Классикалық теңсіздіктерді теңсіздіктерді дәлелдеуде жиі қолданады. Теріс емес сандардың арифметикалық, геометриялық, гармоникалық және квадраттық орталары арасында мынадай қатыстар орынды болады: $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. **Теріс емес сантар топтары үшін:**

Коши - Буняковский теңсіздігі: $(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$

Бернулли теңсіздігі: $(1+\alpha)^n \ge 1 + \alpha \cdot n.$

Минковский теңсіздігі: $\sqrt[k]{(x_1+y_1)(x_2+y_2)\dots(x_k+y_k)} \ge \sqrt[k]{x_1x_2\dots x_k} \cdot \sqrt[k]{y_1y_2\dots y_k}.$

Гельдер теңсіздігі: $(a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_k^3)(b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_k^3)(c_1^3 + c_2^3 + \dots c_k^3) \ge (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + ... + a_kb_kc_k)^3$

Есеп 1. $a, b > 0$ **сандар.** $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \ge 5\sqrt[5]{ab}$ **теңсіздігін дәлелдеңдер.**

Дәлелдеу. **Арифметикалық және геометриялық орталар арасындағы теңсіздік бойынша:**

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} = \sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} \ge 5\sqrt[5]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}} = 5\sqrt[5]{ab}.$$

Есеп 2. $Sin\alpha \cdot Sin\beta + Cos\alpha + Cos\beta \le 2$ **теңсіздігін дәлелдеңдер.**

Дәлелдеу. $Sin\alpha \cdot Sin\beta + Cos\alpha + Cos\beta = Sin\alpha \cdot Cos\beta + Cos\alpha \cdot 1 + 1 \cdot Cos\beta$ **түрде жазалық.**

Сонда $\vec{a}(Sin\alpha; Cos\alpha; 1), \vec{b}(Sin\beta; 1; Cos\beta)$ **делік, Коши-Буняковский теңсіздігі бойынша, аламыз:**

$$Sin\alpha \cdot Sin\beta + Cos\alpha + Cos\beta = Sin\alpha \cdot Cos\beta + Cos\alpha \cdot 1 + 1 \cdot Cos\beta \le$$

$$\le \sqrt{Sin^2\alpha + Cos^2\alpha + 1^2} \cdot \sqrt{Sin^2\beta + 1^2 + Cos^2\beta} \le \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$$

Геометриялық түсініктерді қолдану әдісі

Аналитикалық сұрақтарды геометриялық әдіспен шешу координаталар әдісіне және геометриялық фигуралардың қасиеттеріне негізделеді.

Есепп 1. $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$ **екені белгілі. Дәлелдеңдер:** $ac + bd \leq 1$.

Дәлелдеу. **Центрі O(0;0) нүктесінде орналасқан, радиусы 1-ге тең шеңберді декарттық координаталар жүйесінде қарастыралық, оның теңдеуі:** $x^2 + y^2 = 1$. **M(*a*;b) және N(c;d) болсын, бұл нүктелер есеп шарты бойынша осы шеңберге тиісті болады. Сонда** $\overrightarrow{OM}(a; b), \overrightarrow{ON}(c; d)$ **- бірлік векторлар болады.**

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \leq |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| = 1 \text{ болғандықтан } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = ac + bd \leq 1.$$

Есепп 2. ***a, b, c - теріс емес сандар. Егер болса, онда***

$$\frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(c+a)} + \frac{1}{c^2(a+b)} \geq \frac{3}{2} \text{ теңсіздігін дәлелдеңдер.}$$

Дәлелдеу. $\frac{1}{a} = x, \frac{1}{b} = y, \frac{1}{c} = z$ **түрінде белгілеулер енгізелік. Сонда xyz =1 болады және берілген теңсіздік мына түрге келеді:** S = $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}$. **Бұл теңсіздікке Коши-Буняковскийдің векторлық теңсідігін қолданайық. Мұнда** $\vec{a} = \left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}; \frac{y}{\sqrt{z+x}}; \frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)$, $\vec{b}(\sqrt{y+z}; \sqrt{z+x}; \sqrt{x+y})$ **векторларын қарастырамыз. Бұл векторлар үшін:** $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (x + y + z)^2 \leq \left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right)(y + z + z + x + x + y)$, **бұдан**

$$(x + y + z)^2 \leq 2\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right)(x + x + y),$$

$$S = \left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right) \geq \frac{1}{2}(x+y+z) \geq \frac{x+y+z}{3} \cdot \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Біртіндеп бағалау әдісі

-

Есеп 1. Кез келген натурал n үшін $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leq\frac{2n-1}{n}$ теңсіздігі орынды болатынын дәлелдеңдер.

Дәлелдеңдер. Берілген теңсіздіктің сол бөлігін бағалалық.

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}\leq 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=$$

$$=1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ldots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=2-\frac{1}{n}=\frac{2n-1}{n}.$$

Есеп 2. Дәлелдеңдер: $x^4+y^4+z^4\geq xyz(x+y+z)$.

Дәлелдеңдер. $x^4+y^4\geq 2x^2y^2, y^4+z^4\geq 2y^2z^2, z^4+x^4\geq 2z^2x^2$. Бұл теңсіздіктерді қосып, аламыз:

$$x^4+y^4+z^4\geq x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2.$$

Енді $x^2y^2+y^2z^2\geq 2xy^2z$, $y^2z^2+z^2x^2\geq 2xyz^2, z^2x^2+x^2y^2\geq 2x^2yz$, бұл теңсіздіктерді қосып, аламыз:

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\geq xyz(x+y+z).$$

Сонымен, $x^4+y^4+z^4\geq xyz(x+y+z)$.

Өзбетімен шығаруға арналған есептер

- 1. $e^e \cdot \pi^\pi$ немесе $e^{2\pi}$ сандарын салыстырыңдар.
- 2. Дәлелдеңдер, мұндағы $n \geq 1$, n – натурал сан: $\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+n} \geq \frac{11}{30}$
- 3. Р. Штурм әдісі бойынша қосындысы 1-ге тең $x_1, x_2, \dots, x_n$ емес сандар үшін $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq \frac{1}{n}$ теңсіздігін дәлелдеңдер.
- 4. Дәлелдеңдер: $-\frac{1}{2} \leq \frac{(z+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}$.
- 5. Дәлелдеңдер: $a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} \geq 2$.
- 6. x, y, z - теріс емес сандардың қосындысы 2-ге тең. Дәлелдеңдер: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{9}{4} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$.
- 7. Кез келген x саны үшін $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$ орынды болатынын дәлелдеңдер.
- 8. $\sqrt{x^2 - x + 0,25} \geq 3$ теңсіздігін қанағаттандыратын ең үлкен теріс бүтін санды табыңдар.
- 9. Дәлелдеңдер, егер $a>0, b>0, c>0, d>0$ және $abcd = 1$ болса, онда
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + bc + cd + ad + ac + bd \geq 10.$$
- 10. Кез келген теріс емес x, y, z үшін $x + y + z \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ теңсіздігі орынды болатынын дәлелдеңдер